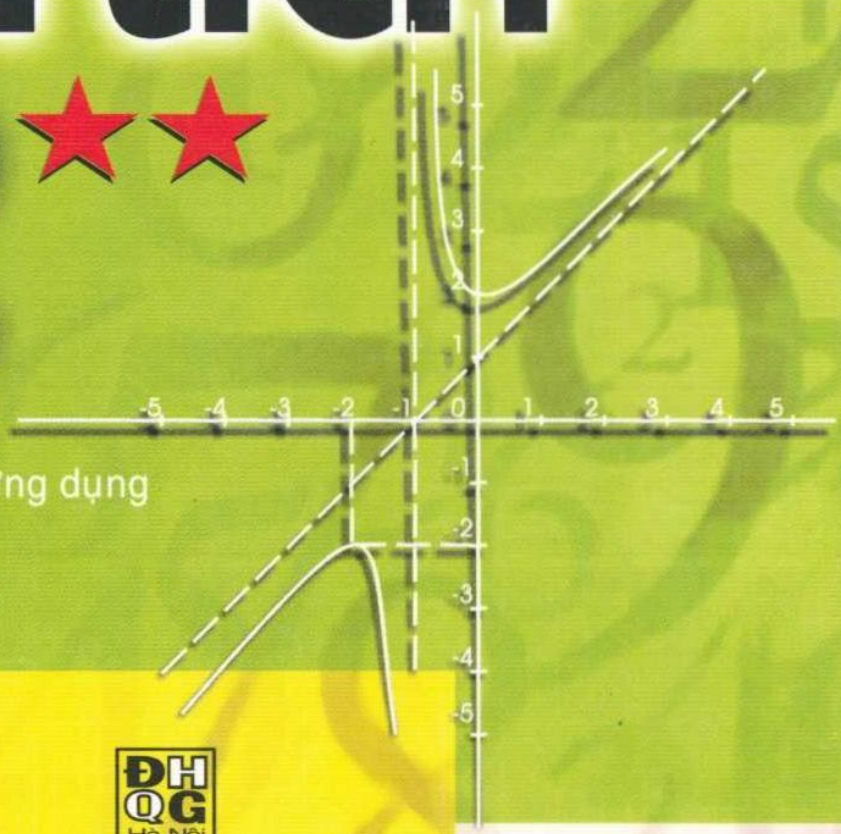
LÊ ĐỨC

• Biên soạn theo chương trình SGK phân ban mới

• Rèn kĩ năng giải bài tập và luyện thi tốt nghiệp - tuyển sinh

Các dạng Toán điển hình

Giải tích 12 ★★



• Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

• Số phức

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ ĐỨC

Các dạng Toán điển hình Giải tích 12 ☆☆

- Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng
- Số phức

- Biên soạn theo chương trình phân ban mới
- Rèn kĩ năng giải toán. • Ôn tập và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia... do Bộ GD&ĐT tổ chức

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
QUỐC THẮNG
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH GIẢI TÍCH 12 (Tập 2)
Mã số: 1L-462DH2008
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 809-2008/CXB/06-143, ngày 18/08/2008
Quyết định xuất bản số: 462LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2008.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH GIẢI TÍCH 12

do Nhóm Cự Môn biên soạn. Cuốn sách được viết dựa trên ý tưởng trình bày của bộ sách ***Phương pháp giải Toán*** *(gồm 11 tập) do Lê Hồng Đức chủ biên và đã được NXB Hà Nội ấn hành.*

Cuốn sách bao gồm 2 chương:

Chương I – NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chương II – SỐ PHỨC

Ở mỗi chương chứa dựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2,...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:

I. ***Tóm tắt lí thuyết****: Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

II. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kĩ năng giải Toán.

III. ***Bài tập tự giải***

Như vậy, ở mỗi bài:

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì ?*
2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được cuốn sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế của người viết, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

Trung tâm sách giáo dục Anpha, 225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

CHƯƠNG I
NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 1 NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa

Cho hàm số f(x) *liên tục trên khoảng* I. *Hàm số* F(x) *được gọi là* ***nguyên hàm*** *của hàm số* f(x) *trên* I *nếu* F'(x) = f(x) *với mọi* x *thuộc* I.

Định lí 1: *Giả sử* F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên khoảng* I. *Khi đó*:

a. *Với mỗi hằng số* C, *hàm số* G(x) = F(x) + C *cũng là một nguyên hàm của* f(x).

b. *Ngược lại, nếu* G(x) *là một nguyên hàm bất kì của* f(x) *thì tồn tại hằng số C sao cho* G(x) = F(x) + C *với mọi* x *thuộc* I.

Kí hiệu $\int f(x)dx$ để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x).

Vậy ta viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ta có:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Định lí 2: *Mọi hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b] *đều có nguyên hàm trên đoạn đó.*

2. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. $\int 0dx = C, \quad \int dx = x + C.$

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$

   $\int e^x dx = e^x + C$

   $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$

4. Với k là hằng số khác 0:

   a. $\int \sin kx.dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C.$

   b. $\int \cos kx.dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C.$

   c. $\int e^{kx}.dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C.$

   d. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C.$

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí 3: *Nếu* F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *và* G(x) *là một nguyên hàm của hàm số* g(x) *thì*:

a. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C.$

b. Với mọi số thực $a \neq 0$:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx = a.F(x) + C.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Với yêu cầu "*Chứng minh rằng* F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên* (a; b)", *ta thực hiện theo các bước sau*:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a; b).

Bước 2: Chứng tỏ rằng F'(x) = f(x) với $\forall x \in (a; b)$.

☞ ***Chú ý***: Nếu thay (a; b) bằng [a; b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a; b).

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Chứng tỏ rằng:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}.$$

Ví dụ 1:

1. $F(x) = x^3 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$, vì:

   $(F(x))' = (x^3 + C)' = 3x^2 = f(x)$.

   Từ đó, có thể tổng quát hoá:

   - Hàm $F(x) = x^k + C$ với $k \neq 0$, C = const là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = kx^{k-1}$ trên $\mathbb{R}$.
   - Ngược lại, hàm số $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$ có họ nguyên hàm là $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

2. $F(x) = \cos x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x$ trên $\mathbb{R}$, vì:

   $(F(x))' = (\cos x + C)' = -\sin x = f(x)$.

   Từ đó, có thể tổng quát hoá:

   - Hàm $F(x) = \cos(ax + b) + C$ với $a \neq 0$, C = const là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -a\sin(ax + b)$ trên $\mathbb{R}$.

- Ngược lại hàm số $f(x) = \sin(ax + b)$, $a \neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$ trên $\mathbb{R}$.

3. $F(x) = e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ trên $\mathbb{R}$, vì:

$(F(x))' = (e^x + C)' = e^x = f(x)$.

Từ đó, có thể tổng quát hoá:

- Hàm $F(x) = e^x + C$ với $C = \text{const}$ là họ nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x$ trên $\mathbb{R}$.
- Ngược lại hàm số $f(x) = e^{ax+b}$, $a \neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng hàm số* $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$ *với* $a > 0$ *là một nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ *trên* $\mathbb{R}$.

Giải

Ta có:

$$F'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2 + a})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = f(x).$$

Vậy, ta có $F(x)$ với $a > 0$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng hàm số:*

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x \neq 0$, ta có:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Với x = 0, ta có :

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-e^0}{x} = 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^0}{x} = 1.$$

Nhận xét rằng $F'(0^-) = F'(0^+) = 1 \Rightarrow F'(0) = 1$.

Tóm lại:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \ge 0 \\ 2x+1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} = f(x).$$

Vậy, ta được F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên $\mathbb{R}$.

☞ ***Chú ý***: 1. Với yêu cầu "Xác định các giá trị của tham số để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b)", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a; b).

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b), điều kiện là:

$F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a; b) \Rightarrow$ giá trị của tham số.

2. Nếu thay (a; b) bằng [a; b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a; b).

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b), điều kiện là:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a; b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{Giá trị của tham số.}$$

Ví dụ 4: *Xác định* a, b *để hàm số*:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ ax+b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \le 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a. Với $x \neq 1$, ta có:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

b. Với $x = 1$: để hàm số F(x) có đạo hàm tại điểm $x = 1$, trước hết F(x) phải liên tục tại $x = 1$, do đó:

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a. \quad (1)$$

Đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 1$, ta đi xác định:

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số $y = F(x)$ tại điểm $x = 1$.

$$F'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = a.$$

Hàm số $y = F(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$ điều kiện là:

$$F'(1^-) = F'(1^+) \Leftrightarrow a = 2. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $b = -1$.

Khi đó: $F'(1) = 2 = f(1)$

Vậy, với $a = 2$, $b = -1$ thì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Vấn đề 2: TÌM NGUYÊN HÀM SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Sử dụng:

- Bảng các nguyên hàm.
- Các tính chất của nguyên hàm.
- Các phép biến đổi đại số.

Ví dụ 1: *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:*

a. (Bài 1.d/tr 141 – Sgk): $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. b. $f(x) = (2x + 3)^{2009}$.

Giải

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int (2x+3)^{2009}dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{2009}d(2x+3)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{(2x+3)^{2009+1}}{2009+1} + C = \frac{(2x+3)^{2010}}{4020} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức sẵn trong bảng nguyên hàm là chỉ ra được nguyên hàm của hàm số.
- Ở câu b) các em học sinh có thể hiểu theo cách thay x bằng u thì:

$$\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

Ví dụ 2: *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. (Bài 1.e/tr 141 – Sgk): $f(x) = 10^{2x}$.

b. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int 10^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 10^{2x}d(2x) = \frac{10^{2x}}{2\ln 10} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$$

☞ ***Chú ý***: Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc tìm nguyên hàm dựa trên các tính chất cùng với bảng nguyên hàm.

Ví dụ 3: (Bài 1.a, 1.b và 1.c/tr 141 – Sgk): *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$.

b. $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$.

c. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int\left(3x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = 3\int x^2dx + \frac{1}{2}\int xdx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$$